GEOMETRÍA Y REALIDAD

Claudi Alsina
Universidad Politècnica de Cataluña
alsina@ea.upc.es

"...el objetivo de la educación matemática debe ser producir ciudadanos educados y no una pobre imitación de una calculadora de 30$"
K. Devlin

Educar geométricamente es un objetivo docente clave cuya finalidad debe ser facilitar el conocimiento del espacio tridimensional, desarrollando con ello la creatividad y los procesos de matematización.

Siguiendo las ideas del proyecto PISA (Jan de Lange y otros) deberíamos prestar especial atención al desarrollo de *grandes competencias* o habilidades como son el pensar matemáticamente, saber argumentar, saber representar y comunicar, saber resolver, saber usar técnicas matemáticas e instrumentos y saber *modelizar.* Aprender a modelizar es saber estructurar el contexto, matematizar y reinterpretar los resultados de esta matematización, revisar el modelo, modificarlo, etc.

Pero no debemos olvidar que el objetivo de enseñar todas estas habilidades debe ser el poder trabajar las *grandes ideas* como son cambio, crecimiento, espacio, forma, azar, dependencia, relaciones, razonamiento cuantitativo,... son este tipo de grandes ideas las que deberán delimitar el tipo de instrumentos matemáticos a poner en juego y por ello encontraremos siempre en la Geometría una fiel aliada para conseguir estos objetivos.

Este planteamiento, que es tan claro, parece sin embargo ser conflictivo pues desde hace años el tema de la Geometría, aceptado por todos como tema importante, no acaba de encontrar su lugar en el desarrollo efectivo de los cursos. Y lo que es más sorprendente, la educación geométrica va empeorando a medida que se avanza en los niveles educativos, planteándose la paradoja de ser más sobresaliente, en términos relativos, el nivel geométrico en la educación infantil que en la universitària.

En una reciente publicación de 1999, Toshio Sawada ha resumido muy bien el problema

> *"De acuerdo con los datos internacionales, hay buenas oportunidades en la enseñanza de la aritmética, álgebra y medidas pero no en geometría, probabilidad y estadística.. Además, en álgebra, como más oportunidades da un país a los estudiantes mejores son los resultados de los estudiantes, pero en geometría parece no haber relación entre oportunidad de aprender y resultados. Parece que todos los países/sistemas están confundidos sobre los contenidos y el método de la enseñanza de la geometría."*

Aunque desde hace años venimos intentando contribuir a la presencia y la modernización de la Geometría, parece ser que aún son necesarios mayores esfuerzos para facilitar que una buena enseñanza geométrica se abra camino, no en los curricula de papel donde ya está, sino en las aulas. Este es el motivo de esta ponencia que no es en absoluto "constructivista" pero si aspira a ser "constructiva".

¿QUÉ ES LA REALIDAD?

> *"¿Cómo crear contextos adecuados para poder enseñar matematizando?...*
> *necesitamos problemas matemáticos que tengan un contexto significativo para los estudiantes"*
> *H. Freudenthal, 1983*

El "mundo real" significa el entorno *natural, social* y *cultural* donde vivimos. Y desde las Matemáticas deseamos educar para que las personas puedan beneficiarse de la cultura matemática para actuar, lo mejor posible, en este mundo real que es su mundo. Actuar a nivel personal, social y profesional tanto en el presente inevitable como en el futuro previsible.

Así pues estamos hablando de hoy (año 2000) y de aquí (España) y por tanto no debemos admitir como "realidad" cualquier contexto o llamada a una supuesta realidad que en verdad es simple ficción. Debemos actuar como dice M. Niss

"...sin disfrazar o camuflar problemas sino buscando su autenticidad"

Muy a menudo tenemos una tendencia a falsear la realidad creando una ficción en la cual es "la realidad" la que se pone al servicio de la matematización y no al revés. Pero además en el terreno educativo deberíamos tener especial sensibilidad para restringir la realidad matematizable a los casos que puedan ser de interés para el alumnado.

En particular si se asume la idea de tomar la resolución de problemas como motor educativo, será preciso combinar bien lo que son los referentes reales y lo que es poner en juego las estrategias de resolución.

Obsérvese el siguiente ejemplo famoso:

> "La ley del movimiento de un cuerpo está expresada por la función $e=t^4-3t^3+2t^2$. Halle en qué intervalos de tiempo el móvil avanza en un sentido o en otro".

¡Inadmisible! Aunque aparentemente aparece un contexto físico de cuerpo-móvil (¿es un robot? ¿es una manzana?) se nos da una función gratuita sin ningún sentido físico (si t se da en segundos ¿...en qué se mide e?).

Obsérvese otro ejemplo

> "Una ventana tiene forma de cicloide. Calcule la superficie del cristal"

¡Horror! Nunca nadie hizo una ventana cicloide...

Todo ello nos lleva a la necesidad de elegir problemas más relevantes, con más significado y contexto. Un bonito ejemplo del proyecto Pisa es el problema:

> "Ha conducido su coche y ha recorrido ya dos terceras partes del camino. El tanque de la gasolina estaba lleno al empezar y ahora le queda un cuarto de depósito. ¿Tiene algún problema?"

¡Magnífico! Aunque no existe referencia explícita al coche, al lugar, etc., el problema plantea una cuestión interesante y realista... y además está formulado para obligar a pensar un poco.

Es importante elegir problemas interesantes y en contextos adecuados. El siguiente enunciado daría lugar a un bello problema.

Boeing 747-200

Fabricado por The Boeing Company en Seattle, Estado de Washington (EE.UU).
Manufactured by The Boeing Company in Seattle, Washington (USA).

Longitud/Length	70,51 m	Envergadura/Wingspan	59,63 m
Butacas/Seats	410	Nº de unidades/ No. of aircrafts	6
Alcance/ Range	10.000 km		

________ . ________ . ________ . ________ . ________ .

Si con un Boeing 747-200 se organiza una vuelta al mundo ¿qué itinerario organizaría con el mínimo número de escalas partiendo y regresando a Zaragoza?

Nótese que los datos colaboran a hacer el problema más real, y que el enunciado abierto abre posibilidades a diferentes aproximaciones.

En las tres tablas siguientes ejemplificamos correspondencias entre polígonos, poliedros, curvas, superficies y transformaciones geométricas con situaciones cotidianas.

Aquí cabe distinguir lo que es la realidad bien próxima de las personas de las aplicaciones que aun siendo reales no son directamente perceptibles por los usuarios.

POLÍGONOS Y POLIEDROS EN LA REALIDAD			
FIGURA	**EJEMPLO 1**	**EJEMPLO 2**	**EJEMPLO 3**
TRIÁNGULO	Instrumento musical	Señal tráfico	Señal avería
CUADRILÁTERO	Hoja papel	Loseta	Galleta
PENTÁGONO	Puntas de los dedos	Logo Chrysler	Nudo de servilleta
HEXÁGONO	Perfil plato	Sección lápiz	Loseta
OCTÁGONO	Perfil bandeja	Estrella vientos	Mesa granadina
POLIGONO ESTRELLADO	Estrella de mar	Estrella de David	Llanta de rueda
n-POLÍGONO	Puntos horas reloj	Logos comerciales	Sec. Columnas Gaudí
CUBO	Dado	Cubito caldo concentrado	Caja regalo
TETRAEDRO	Tetra Pack ®	Puzzle 3D	Trípode
OCTAEDRO	Talla diamante	Estructura mesa	Barrilete 3D
ICOSAEDRO	Dado 20-caras	Logo MAA	Cúpula
DODECAEDRO	Contenedor papel	Puzzle 3D	Dado 12 caras
PRISMA	Chocolate Toblerone	Prisma Hexagonal Pastelería	Caja Chanel nº 5
PRISMATOIDE	Obelisco	Caja cartón	Pedestal
PIRÁMIDE	Pirámide egipcia	Embudo industrial	Final obelisco
BIPIRÁMIDE	Peonza	Dedos contra dedos	Joya
POLIEDROS SEMIREGULARES	Pelota de fútbol	Joya	Puzzle
POLIEDROS ESTRELLADOS	Lámpara cristal	Joya	Estrella árbol Navidad
ORTOEDRO	Tetra Brick ®	Pastel	Cajetilla Marlboro
ANTIPRISMA	Jarrón	Vaso	Patas mesa

CURVAS Y SUPERFICIES EN LA REALIDAD			
FIGURA	**EJEMPLO 1**	**EJEMPLO 2**	**EJEMPLO 3**
RECTA	Lado papel	Hilo tenso	Cuerda con plomada
CIRCUNFERENCIA	Perfil plato	Perfil vaso	Moneda
ELIPSE	Perfil sombrero	Líquido en vaso inclinado	Perfil cepillo
PARÁBOLA	Arco A. Gaudí	Mano cerca oreja	Arco con tirantes puente
HIPÉRBOLA	Perfiles (6) punta lápiz hexagonal	Perfil campana	Arco hiperbólico Construido
SINUSOIDE	Gráfico altura mar	Movimiento serpiente	Techo Uralita ®
CATENARIA	Cadena reloj de mano	Hilo tren	Hilos eléctricos
CICLOIDE	Trayectoria punto rueda	Cuenco	Péndulo cicloidal
ESPIRALES	Cinta cassette	CD-musical	Rollo fotográfico
HÉLICE (3D)	Escalera caracol	Muelles	Hilo en cilindro
PLANO	Papel	Mesa	Suelo
ESFERA	Perla	Pelota ping-pong	Planeta Tierra
ELIPSOIDE	Pelota rugby	Cúpula (1/2)	Huevo Pascua
CONO	Punta de lápiz	Colador (chino)	Vaso
CILINDRO	Lápiz redondo	Rollo de papel	Olla
PARABOLOIDE	Antena TV	Faro coche	Cúpula
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO	Silla de montar a caballo	Cubiertas F. Candela	Cubiertas A. Gaudí
HIPERBOLOIDE (1H)	Campana	Papelera	Chimenea (C. Térmica)
HIPERBOLOIDE (2H)	Espejo hiperbólico	Espejo telescopio	Trenza cortada
TORO	Donut	Anillo	Cadena

TRANSFORMACIONES Y REALIDAD			
TIPO	**EJEMPLO 1**	**EJEMPLO 2**	**EJEMPLO 3**
TRASLACIÓN 2D	Dibujar 1 recta	Dibujar un friso	Huella de rueda
GIRO 2D	Agujas reloj	Rotor en motor	Punta de compás
SIMETRÍA 2D	Escritura espejo	Letras impresor	Caleidoscopio
SEMEJANZA 2D	Fotocopias	Fotografías	Plano
AFINIDAD 2D	Cambio lineal escalas	Apertura salvamanteles	Sombra plato
PROYECTIVIDAD 2D	Perspectiva	Foto de cubo	Sombra en foto
HOMEOMORFISMO 2D	Estirar goma	Mueca facial	Deformación Photosop ®
TRASLACIÓN 3D	Andar recto	Aspiradora	Cortar pan
ROTACIÓN 3D	Mover puerta	Tambor lavadora	Girar llave
SIMETRÍA 3D	Mirar espejo	Apariencia cuerpo	Aplaudir
MOV. HELICOIDAL 3D	Escalera caracol	Sacacorchos	Atornillar
SEMEJANZA 3D	Maqueta arquitectura	Tren eléctrico (1:169)	Casa muñecas (1:12)
AFINIDAD 3D	Cambio lineal escalas	Plegado de caja	Mover tienda campaña
PROYECTIVIDAD 3D	Perspectiva dibujo 3D	Foto de 3D	Mirar vías de tren
HOMEOMORFISMO 3D	Ajustarse calcetín	Deformar globo	Ponerse guantes
CONSERVAR AREA PERO NO DISTANCIA	Plegar sábanas	Abrir un libro	Prensar
CONSERVAR VOLUMEN PERO NO DISTANCIA	Amasar harina	Hacer masa pizza	Bailar
EFECTOS ESPECIALES	Retocar fotos	Mezclar imágenes	Digitalizar
PROYECCIONES RARAS	Espejo cilíndrico	Espejos deform.	Sombras chinas
TRANSFORMACIONES RARAS	Romper foto	Quemar foto	Hacer caricatura

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y GEOMETRÍA

"El contexto puede ser la vida cotidiana, cultural, científica, artificial, matemático, etc... los problemas del mundo real serán usados para desarrollar conceptos matemáticos... luego habrá ocasión de abstraer, a diferentes niveles, de formalizar y de generalizar... y volver a aplicar lo aprendido... y reinventar la matemática..."

Jan de Lange

Una completa e interesante descripción general de la modelización matemática ha sido dada por Henry O. Pollak ("Solving Problems in the Real World" en el libro de L.A. Steen (Ed.) Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America. The College Board, New York, 1997):

> "Cada aplicación de la matemática usa la matemática para evaluar o entender o predecir algo que pertenece al mundo no matemático. Lo que caracteriza a la modelización es la atención explícita al principio del proceso, al ir desde el problema fuera del mundo matemático a su formulación matemática, y una reconciliación explícita entre las matemáticas y la situación del mundo real al final. A través del proceso de modelización se presta atención al mundo externo y al matemático y los resultados han de ser matemáticamente correctos y razonables en el contexto del mundo real".

También H.O. Pollack ha descrito muy minuciosamente los ocho pasos que deben darse en la modelización matemática y que recogemos en la tabla adjunta

:

LAS OCHO ETAPAS DE LA MODELIZACIÓN SEGÚN H.O. POLLACK

1. Se identifica algo en el mundo real que queremos conocer, hacer o entender. El resultado es *una cuestión* en el mundo real.
2. Seleccionamos "objetos" que parecen importantes en la cuestión del mundo real e identificamos las relaciones entre ellos. El resultado es la identificación de *conceptos clave* en la situación del mundo real.
3. Decidimos lo que consideraremos o lo que ignoraremos sobre los objetos y su inter-relación. No se puede tomar todo en cuenta. El resultado es una versión idealizada de la cuestión original.
4. Traducimos la versión idealizada a términos matemáticos y obtenemos una formulación matematizada de la cuestión idealizada. A esto lo llamamos un *modelo matemático.*
5. Identificamos los apartados de la matemática que pueden ser relevantes para el modelo y consideramos sus posibles contribuciones.
6. Usamos métodos matemáticos e ideas para obtener resultados. Así surgen técnicas, ejemplos interesantes, soluciones, aproximaciones, teoremas, algoritmos,…
7. Tomamos todos estos resultados y los trasladamos al principio. Tenemos entonces una teoría sobre la cuestión idealizada.
8. Ahora debemos verificar la realidad. ¿Creemos en el resultado? ¿Son los resultados prácticos, las respuestas razonables, las consecuencias aceptables?
   (a) Si la respuesta es sí, hemos tenido éxito. Entonces el siguiente trabajo que es difícil pero extraordinariamente importante es comunicar lo encontrado a sus usuarios potenciales.
   (b) Si la respuesta es no, volvemos al inicio. ¿Por qué los resultados no son prácticos o las respuestas no razonables o las consecuencias inaceptables? Seguramente el modelo no era correcto. Examinamos lo que pudimos hacer mal y porqué y empezamos de nuevo.

Así pues es interesante prestar atención al proceso de trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos debiéndose realizar dicho trabajo en dos direcciones opuestas: a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas... y trabajando entonces matemáticamente hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volverse a proyectar en la realidad para analizar su validez y significado.

Cabe señalar que la investigación educativa ha puesto de manifiesto las grandes dificultades que el alumnado tiene en la verificación de soluciones: individuos que aprenden a resolver cuestiones son a menudo incapaces de decidir cuáles de los resultados hallados son relevantes para el problema propuesto. Seguramente esto debería inducirnos a prestar especial atención a este último pero importantísimo eslabón de la resolución de problemas.

En las tablas adjuntas podemos observar los apartados matemáticos ligados a Geometría (que según Joe Malkevitch nos deberían hacer replantear los temas a tratar bajo la denominación "geometría". También hemos listado unas ejemplificaciones de aplicaciones (Alsina, Fortuny, Perez, 1997) y una tabla indicando los instrumentos matemáticos que peuden ponerse en juego al tratar temas geométricos.

Apartados matemático-geométricos	
1. Geometría euclídea	26. Geometría métrica
2. Geometrías no-euclídeas	27. Diseño VLSI
3. Geometría proyectiva	28. Teoría de códigos
4. Geometría descriptiva	29. Autómatas celulares
5. Geometría analítica	30. Cartografía
6. Geometría integral	31. Robótica
7. Transformaciones geométricas	32. Cristalografía
8. Teoría de la simetría	33. Sistemas dinámicos
9. Teoría de mosaicos	34. Geometría algebraica
10. Problemas en retículos	35. Programación lineal
11. Teoría de grafos	36. Cónicas y cuádricas
12. Convexidad	37. Geometría n-dimensional
13. Geometría discreta	38. Geometría del espacio-tiempo

14. Geometría de superficies	39. Visión computacional
15. Poliedros	40. Teorías de redes neuronales
16. Teoría de la disección	41. Geometría fractal
17. Geometría diferencial	42. Desigualdades geométricas
18. Geometría computacional	43. Geometría de inversión
19. Teoría de empaquetamientos	44. Geometría de complejos
20. Teoría de la rigidez estructural	45. Visualización de datos
21. Geometría digital	46. Construcciones geométricas
22. Teoría de nudos	47. Modelización de sólidos
23. Problemas isoperimétricos	48. Origami
24. Juegos geométricos	49. Teoría de catástrofes
25. Curvas planas	50. Historia de la Geometría

Ejemplos de aplicaciones geométricas
· Aplicaciones a la modelización matemática del mundo físico
· Geodesia y triangulación
· Aplicaciones en astronomía y mecánica celeste.
· Cartografía (aérea, satélite, temática,...)
· Cálculos de medidas (áreas, superficies, volúmenes)
· Problemas comerciales (envasado, empaquetado, tallas, patrones,...)
· Estructuras en ingeniería y arquitectura
· Clasificación de nudos
· Digitalización y manipulación de imágenes
· Grafos e investigación operativa
· Formas y transformaciones al servicio de la creación artística
· Aplicaciones a la computación y gráficos por ordenador
· Visualización de datos estadísticos
· Procesamiento de imágenes, compresión y registro
· Teoría de barras y engranajes
· Aplicaciones en óptica, fotografía y cine
· Elementos multimedia inter-activos

· Codificación, descodificación y criptografía

· Robótica: movimientos, visión, tareas automáticas

· Descripciones cristalográficas estáticas y de conocimiento

· Modelización de procesos dinámicos y caóticos

· Doblado de papel, origami y empaquetado

MODELIZACIÓN GEOMÉTRICA: INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

- **Modelización vectorial:** vectores, coordenadas, producto escalar, norma, distancia, ángulo, proyección, figuras, transformaciones,...
- **Modelización algebraica:** vectores en coordenadas, matrices, sistemas de ecuaciones, determinantes, dependencias entre variables, cónicas y cuádricas, grupos de transformaciones.
- **Modelización métrica sintética:** figuras, transformaciones, perímetros, superficies, volúmenes, ángulos, maquetas, disecciones, proyecciones, trigonometría,...
- **Otros instrumentos:** axiomatización, modelos discretos, modelos computacionales.

Así pues podemos observar dos cosas especialmente interesantes:

- *La geometría abarca diversas ramas matemáticas relevantes para desarrollar procesos de modelización y labores interdisciplinarias.*
- *La geometría permite poner en juego recursos matemáticos distintos y puede ayudar a ver en cada caso cual es el instrumento más adecuado.*

UNA COLECCIÓN DE PROBLEMAS INTERESANTES

En nuestra aproximación al tema de geometría y realidad nos gustaría indicar ahora una pequeña muestra de problemas que resultan particularmente atractivos:

- **Algoritmos y cuentas (ATM)**

Se tiene una fila de *n* personas sentadas. Pueden moverse (levantarse o sentarse) siguiendo las siguientes reglas:

(a) La 1ª puede levantarse o sentarse sin depender de las demás;

(b) La 2ª puede moverse si la 1ª está sentada;

(c) La 3ª puede moverse si la 2ª está sentada y la 1ª está de pie;

(d) La nª puede moverse si la (n-1)ª está sentada y las n-2 restantes de pie.

Indique un algoritmo para levantar una fila de *n* personas sentadas. Si a_n indica el número de movimientos para levantar una fila de n, relacione a_n con a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3},... etc. ¿Cómo podría expresarse a_n en función de *n*?

- **División espacial (Pólya)**

¿En cuantas regiones pueden llegar a dividir el espacio tridimensional cinco planos?

- **Localización óptima (Pólya)**

Hay tres poblaciones A, B, C cuyas distancias conocemos ¿cuál es el punto P cuya suma de distancias a A, B y C resulta mínima?. Idear diversas estrategias para resolver este problema.

- **Sistema DINA para papel** (Alsina)

Toda hoja DINA n al dividirse en dos partes por el lado largo da dos hojas DINA n-1 de igual forma, siendo el DINA 0 de 1 m^2 de superficie. Halle las medidas exactas del DINA 0, 1, 2, 3, 4

¿Qué factores actúan al fotocopiar reduciendo de una DINA 3 a un DINA 4? ¿Y al ampliar?

- **Los números f en fotografía** (Alsina)

Los números f 1·4, 2, 2·8, 4, 5·6, 8, 11, 16,... se corresponden con el hecho de que cada número corresponde a una apertura del diafragma que permite el paso del doble de luz de la apertura anterior. Justifique los valores de dichos números

- **Originales e imágenes en fotografía** (Alsina)

Dado un objeto O y su imagen I a través de una cámara de distancia focal F, si u es la distancia objeto-lente y v la de la lente a la imagen, se verifica $1/u + 1/v = 1/F$ y $I/O=v/u$.

Halle u y v en función de I, O y F. ¿Cuál sería la foto más grande que podría hacer de una joya circular de 1,2 cm de diámetro con una máquina de 30 cm de extensión máxima de fuelle y un objetivo de 10 cm de distancia focal?

- **Teorema del observador** (Zeeman)

En un cuadro en perspectiva donde se representa un cubo con tres puntos de fuga existe un único punto en el espacio de delante del cuadro donde un observador debe colocar su ojo para ver perfectamente el cuadro. Justifique la validez de este teorema.

- **Un sistema de posición global (GPS)** (White)

  Sean tres satélites en posiciones $S_i=(a_i,b_i,c_i)$, i=1,2,3 y sean P=(x,y,z) las coordenadas de un punto a localizar en la tierra. Verifique que si pueden darse las tres distancias de P a S_1, S_2 y S_3 (vía el tiempo de ida y retorno de una señal) entonces P queda completamente determinado.

- **Alimentación equilibrada**

  En una referencia cartesiana representará las proporciones de hidratos de carbono H, proteinas P y lípidos L, siendo L+P+H=100%. Represente la zona de la dieta equilibrada que corresponde a $10 \leq P \leq 20$, $50 \leq H \leq 50$ y $25<L<35$.

- **Índice de masa corporal** (Alsina)

  El IMC (índice de masa corporal) viene dado por W/h^2 siendo W el peso (en kg) y h la altura (en m). Estudie la condición de equilibrio $20 \leq IMC \leq 25$.

- **Movimientos cotidianos** (Bolt)

Describa los movimientos geométricos de los aparatos e instrumentos que se hallan en una casa (reloj, libro, tijeras, caja, llave, sacacorchos,...).

- **Para los arquitectos “la tierra es plana”** (Alsina)

  Estudiar la diferencia entre la longitud de un trozo de arco terrestre ab y su aproximación lineal tangente (siendo el radio de la Tierra R=6371221 m).

- **Longitudes y latitudes** (COMAP)

  En el esquema tiene dos puntos A=(r,s), B=(u,v) con longitud y latitud como coordenadas terrestres. Al mirar desde A y B un punto S=(x,y) se miden los ángulos azimutales a y b relativos al Norte. Si A=(-120º24’19’’, 48º37’51’’) y B=(-120º31’59’’, 48º38’03’’), a=242º y b=198º calcule (x,y).

- **Sombras muy especiales** (Alsina)

  Construya un objeto cuya sombra pueda ser una sinusoide sin tener dicho objeto la forma de esta curva.

- **Rampas para parquings** (Alsina)

  ¿Cómo construir una rampa de pendiente constante razonable alrededor de un edificio cilíndrico? ¿Cómo marcaría en la zona de aparcar las líneas indicando los lugares de aparcar?

- **Fabricando dados** (Alsina)

  ¿Cómo fabricar dados para poder sortear cualquier número?

- **Geometría y cocina** (Bolt)

  ¿Qué formas geométricas aparecen en los objetos usados para cocinas y que funciones cumplen?

- **La mancha de petróleo** (Borrell).

  Un barco con 3000 m^3 de petróleo se hunde y provoca una mancha en el mar de forma “cilíndrica” siendo su espesor $E(t)=\left[2^{-\frac{t}{5}+\frac{1}{2}}\right]^2$, *t* horas después del hundimiento. Acordonando la mancha 15 horas después del hundimiento, se añadan 0,5 m^3 de un detergente por metro de perímetro de la mancha, valiendo el detergente 5 pesos por m^3. Evalúe el coste de esta intervención.

- **Goles de penalty en fútbol** (E. Fernández, J.F. Matos)

En el proceso de tirar un penalty en fútbol aparecen los siguientes parámetros:

d: distancia del punto de penalty

h: altura del portero

a: anchura de la portería

b: altura de la portería

t_0: instante de lanzamiento

t: instante de la pelota en portería

$\theta(t)$: la pelota al llegar al marco de portería

$\theta(t_0)$: la pelota antes de ser lanzada

$\vec{d}'$: $\overrightarrow{O(t_0)O(t)}$

θ: ángulo de elevación de la trayectoria de la pelota

ϕ: ángulo de desviación (en el plano longitud) de la pelota

$\vec{v}_0$: velocidad inicial de la pelota

Exprese usando trigonometría y principios básicos de física las relaciones existentes entre dichas magnitudes.

EL LABORATORIO DE GEOMETRÍA

Siempre hemos creído imprescindible que existan laboratorios específicos de Geometría con materiales adecuados. Aquí me gustaría recordar (Alsina et altri, 1990) algunas consideraciones sobre el material didáctico.

El material didáctico, juega un papel fundamental en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Su correcta utilización constituye una importante baza en la adquisición de conceptos, relaciones y métodos geométricos ya que posibilita una enseñanza activa de acuerdo con la evolución intelectual del alumno. La *estructura de laboratorio* es un modelo pedagógico de utilización del material.

Un entorno –la Estructura del Laboratorio- emerge cuando el profesor y los alumnos trabajan y se comunican por medio de un plan conjunto de actividades de investigación, acorde con sus intereses, capacidades y habilidades.

Básicamente existen tres modos de organizar una tarea docente a partir de una estructura de laboratorio: *El aula taller*, como laboratorio fijo, la *propia aula*, como laboratorio móvil reorganizando periódicamente su espacio interior, y el *trabajo de campo* que tiene como escenario un gran espacio, ya sea urbanístico o natural. La situación más corriente es la de utilizar un laboratorio móvil.

Pensamos que en una adecuada dinámica de laboratorio, hay que tener siempre en cuenta, los siguientes aspectos:

1. Una *introducción* al tema, para situar al alumno.
2. Dar a conocer los *objetivos*, para enmarcar las acciones a realizar.
3. Una presentación de las *investigaciones* a realizar, adecuadamente graduadas por niveles de comprensión, en las que se induce a manipular, construir, observar, explicar y expresar conjeturas y descubrir distintas relaciones sobre el concepto a tratar.
4. Una *discusión* y *contraste* en gran grupo, para así enriquecer y comunicar los distintos descubrimientos realizados. En este momento el profesor actúa de moderador de cara a establecer conclusiones.
5. Realización y resolución de ejercicios de *utilización* y *consolidación* y de *problemas de extensión y ampliación.*

En la evaluación de esta forma de tarea docente, se tiene en cuenta: 1) La evaluación de los registros escritos y orales. 2) La observación del grado de participación e interacción de cada alumno en las muchas de las actividades de investigación propuestas.

Quisiéramos resaltar la existencia de software como Cabri II, Geometry sketch-pack y Kaleidomania! que hoy deberían integrarse en todos los laboratorios geométricos para temas de dibujo. Sin olvidar las calculadoras científicas de Cassio y de Texas Instruments que facilitan visualizaciones interesantes projectables de curvas y superficies.

Los videos como los de COMAP son especialmente sugestivos para poder ver aplicaciones y actualmente gracias a Internet podemos añadir una facilidad enorme que es la idea de laboratorio virtual donde efectuar visitas, dibujos, ver aplicaciones, etc. Las siguientes direcciones son especialmente interesantes:

http://www.fi.uu.nl
http://ww.comap.com
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/
http://www.hull.ac.uk/mathskills/
http://www.ntu.edu.sg/library/sgpacadR.htm
http://www.math.bme.hu/mathhist/Curves/Curves.html
http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00the.htm
http://www.profes.net
http://www.leonet.it/culture/nexus/network journal
http://www.educ.msu.edu/mars
http://www-gse.berkeley.edu/Faculty/gsefaculty.ss.html#schoenfeld
http://www.kutzler.com/bk/m-events

---

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/3740/history.html
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/3740/euclid.html
http://www.ies.co.jp/math/java/pythagoras.html
http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/index.html
http://www.lander.es/~lcjusto/pita_0.html
http://library.advanced.org/19029/quadprojects.html
http://www.cut-the-knot.com/triangle/altitudes.html
http://www.ies.co.jp/math/java/congruent.html
http://www.teleport.com/~tpgettys/poly.html
http://www.li.net/~george/virtual-polyhedra/vp.html
http://www.physics.orst.edu/~bulatov/polyhedra/spherical/index.html
http://sunsite.ubc.ca/LivingMathematics/Packages/CopyCat/
http://www.li.net/~george/virtual-polyhedra/art.html
http://www.li.net/~george/pavilion.html
http://www.li.net/~george/sculpture/sculpture.html
http://www.li.net/~george/chasey.html
http://www.users.csbsju.edu/~mwenning/
http://pubweb.acns.nwu.edu/~gbuehler/index.html
http://freeabel.geom.umn.edu/docs/reference/CRC-formulas/
http://members.xoom.com/dpscher/intcircles.html
http://members.xoom.com/dpscher/ladder.html
http://members.xoom.com/dpscher/triangle.html
http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html
http://www.ies.co.jp/math/java/circles.html
http://www.ies.co.jp/math/java/elgear/elgear.html
http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/cycloids.html

http://freeabel.geom.umn.edu/docs/references/CRC-formulas/
http://freeabel.geom.umn.edu/docs/reference/CRC-formulas/
http://www.aula-ee.com/aula/webs-alumnes/esfera/esfera.htm
http://www.uib.no/People/nfytn/mathgal.htm
http://www.cut-the-knot.com/do_you_know/paper_strip.html
http://www.cut-the-knot.com/do_you_know/moebius.html

A nivel personal hemos estado elaborando un web para facilitar una visita virtual a un laboratorio de geometría dedicado a la tridimensionalidad que podrá consultarse a través de mi servidor de la Universidad Politécnica de Cataluña y al cual quedan cordialmente invitados.

Hacia una cultura espacial

Para finalizar y enlazando con nuestra conferencia impartida en ICME-9 recientemente me gustaría indicar cuales son ocho consejos que me parecen especialmente relevantes para dar una *cultura espacial,* que es tal como se indicó al principio, el objetivo docente último de la geometría:

1. El pensamiento visual en tres dimensiones, clave en la cultura espacial, debe ser estimulado en todos los niveles
2. El sentido común espacial debe ser cultivado pues no es, necesariamente, una capacidad innata
3. La cultura espacial requiere romper la cadena 1D – 2D – 3D y superar dificultades técnicas para poder conocer el espacio de forma adecuada en cada nivel
4. La cultura espacial debe basarse en la realidad, explorando sus posibilidades y resolviendo problemas reales
5. La cultura espacial se enriquece con el uso de diversos lenguajes, tecnologías y modelos
6. La cultura espacial debe favorecer conexiones entre aspectos ambientales, históricos, artísticos, etc. fomentando la interdisciplinariedad
7. La cultura espacial permite promover el espíritu de la investigación en las clases de matemáticas
8. La cultura espacial debe proveer a los futuros ciudadanos instrumentos para desarrollar las habilidades espaciales y la creatividad

La Geometría quiere y debe estar en nuestras aulas. Se merece una buena oportunidad.

REFERENCIAS

- Alsina, C., 1993, *La Matemática de la Forma.* MEC, Madrid.
- Alsina, C., 1995, *Una matemática feliz y otras conferencias* Buenos Aires, OMA.
- Alsina, C., 1998, *Contar bien para vivir mejor.* Editorial Rubes, Barcelona.
- Alsina, C., 1998, Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope, *Proceed*. ICTMA-1997.
- Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J.M. (1990), *Materiales para construir la Geometría,* Ed. Síntesis, Madrid.
- Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J.M.; Giménez, J.; Torra, M., 1996, *Enseñar Matemáticas*, Graó, Bacelona.
- Alsina, C., 2000, *Sorpresas Geométricas,* Buenos Aires, OMA.
- Alsina, C., 2000, *La matemática hermosa se enseña con el corazón,* Buenos Aires, OMA.
- Alsina, C.; Fortuny, J.M., 1998, *Fascinante Simetría,* Pub. Museu de la Ciència, Fund. La Caixa, Barcelona.
- Alsina, C.; Fortuny, J.M., 1993, *La Matemàtica del Consumidor* Barcelona: Inst. Cat. Consum. Generalitat de Catalunya.
- Alsina, C.; Fortuny, J.M.; Giménez, J., 1994, *Bon dia mates, 12-16.* Dep. d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya, Barcelona.
- Alsina, C.; Fortuny, J.M., Pérez, R., *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*, Síntesis, Madrid, 1997.
- Alsina, C.; Garcia, J.L.; Jacas, J. 1992, *Temes clau de Geometria.* Pub. Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Alsina, C.; Trillas, E., 1990, *Lecciones de Álgebra y Geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura.* Editorial Gustavo Gili, Barcelona.
- Blum, W.; Niss, M., 1991, Applied mathematical problem solving, modeling, applications and links to other subjects- State, trends and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss & I. Huntley, Eds., *Modeling,*

applications and applied problem solving-Teaching mathematics in a real context. Chichester: Ellis Horwood, 1989, 1-21.

- Bolt, B., 1982, *Mathematical activities*, Cambridge, Univ. Press.
- Bolt, B., 1988, *Más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona.
- Bolt, B., 1991, *Mathematics meets technology*, Cambridge, U.P.
- Cook, T.A., 1979, *The Curves of Life: Being an Account of Spiral Formations and their Applications to Growth in Nature, to Science, and to Art,* New York, Dover Publications.
- Davis, P.J.; Hersh, R., 1981, *The Mathematical Experience,* Boston, Birkhauser.
- De Lange, J., 1987, *Mathematics, Insight and Meaning,* Utrecht, OW & OC.
- De Lange, J., 1996, Real problems with real world mathematics, *Proc. ICME-8*, Sevilla.
- De Lange, J.; Keitel, C.; Huntley, I.; Niss, M. ed., 1993, *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications,* Chichester, Ellis Horwood Limited.
- Devlin, K., 1997, Why we should reduce skills teaching in the math class, *Focus*, MAA.
- Estalella, J., 1920, *Ciencia Recreativa,* Gustavo Gili, Barcelona.
- Fernández, E., Matos, J.F., *Goal!!!! The Mathematics of a Penalty shoot-out in a football game,* Prod. ICTMA, P. Galbraith et al. (ed), Horwood Pub. Chichester, 159-167.
- Garfunkel, S. et al., 1998-2000, Modeling Our World (Arise Project) Lexington, COMAP.
- Garfunkel, S. (ed). 1997, *Principles and Practice of Mathematics,* COMAP, Springer-Verlag, New York.
- Ghyka, M.C., 1977 *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes.* Ed. Poseidón, Barcelona.
- Guzmán, M. de, 1991, *Para pensar mejor.* Ed. Labor, Barcelona.
- Honsberger, R., 1970, *Ingenuity in Mathematics*. MAA, Washington.
- Howson, G., 1997, *Mathematics and common sense.* Proc. ICME-8, Seville.
- Kasner, E.; Newman, J., 1972, *Matemáticas e imaginación,* ed. Continental, México.

- Lakatos, I., 1978, *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático,* Alianza, Madrid.
- Mandelbrot, B., 1982, *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, New York.
- McMahon, T.; Bonner, J., 1983, *On Size and Life,* New York, Scientific American Library.
- Niss, M., 1989, Aims and scope of applications and modeling in mathematics curricula. In W. Blum et al. (Eds.), *Applications and modeling in learning and teaching mathematics* (22-31). Chichester: Ellis Horwood.
- Paulos, J.A., 1996, El hombre anumérico, Tusquets, Ed., Barcelona.
- Paulos, J.A., 1997, Un matemático lee el periódico, Tusquets, Ed., Barcelona
- Paulos, J.A., 1999, Érase una vez un número, Tusquets, Ed., Barcelona.
- Pedoe, D., 1982, *La Geometría en el Arte.* Ed. Gustavo Gili, Barcelona.
- Pólya, G., 1985, *Cómo plantear y resolver problemas.* Ed. Trillas, México.
- Salvadori, M., 1990, Why buildings stand up, WW Norton, New York.
- Senechal, M.; Fleck, G., 1988, *Shaping Space: A Polyheral Appraoch,* Design Science Collection, Boston: Birkhauser.
- Steen, L.A., 1994, *For all practical purposes,* COMAP, Lexington. W.H. Freeman Co. New York. Versión española: Matemáticas en la vida cotidiana, Addison-Wesley, Madrid, 1999.